Droites et plans de l'espace — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur les droites et plans de l'espace. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la représentation paramétrique d'une droite, le lien entre vecteur normal et équation cartésienne d'un plan, les positions relatives et la méthode du projeté orthogonal. Retiens le principe : vecteur directeur pour une droite, vecteur normal pour un plan, et un seul paramètre t pour les trois coordonnées.

Exercice 1 ***Lire et écrire une représentation paramétrique*** **(T^{le}).**

1. La droite $\mathcal{D}$ a pour représentation paramétrique $x = 2 - t$, $y = 3t$, $z = 1 + 2t$. Compléter : un point de $\mathcal{D}$ est A(..... ; ..... ; .....), un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$, et le point de paramètre $t = -1$ est (..... ; ..... ; .....).
2. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) avec A(1 ; 0 ; 2) et B(3 ; −1 ; 4).

3. Les points M(4 ; −6 ; −3) et N(0 ; 6 ; 4) appartiennent-ils à la droite $\mathcal{D}$ de la question 1 ?

4. Les représentations $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3 - t$ et $x = 3 - 2s$, $y = 4 - 4s$, $z = 1 + 2s$ décrivent-elles la même droite ?

Exercice 2 ***Équation cartésienne d'un plan, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Le plan $\mathcal{P}$ passe par A(0 ; 1 ; 2) et a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Compléter : $\mathcal{P} : x - y +$ ..... $z + d = 0$; avec A : $0 - 1 +$ ..... $+d = 0$, donc $d =$ ..... et $\mathcal{P}$: .....

2. Donner un vecteur normal du plan $\mathcal{Q} : 3x - y + 2z - 5 = 0$. Les points E(1 ; 0 ; 1) et F(2 ; 3 ; 1) appartiennent-ils à $\mathcal{Q}$?

3. Soit A(1 ; 1 ; 0), B(0 ; 2 ; 1) et C(2 ; 0 ; 3). Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, vérifier qu'ils ne sont pas colinéaires, déterminer un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ orthogonal aux deux, puis une équation du plan (ABC).

Exercice 3 ***Intersection d'une droite et d'un plan*** **(*T^le*).** On considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0$.

1. Soit $\mathcal{D} : x = 2 + t,\ y = -1 + 3t,\ z = 1 - t$. Compléter : $2(2 + t) - (-1 + 3t) + (1 - t) - 4 =$ ..... $-$ ..... t, donc $t =$ ..... et $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{\text{I}\}$ avec I(..... ; ..... ; .....). Vérification : .....

2. Soit $\mathcal{D}' : x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - t$. Calculer $\vec{u}' \cdot \vec{n}$ et conclure sur la position de $\mathcal{D}'$ par rapport à $\mathcal{P}$. Préciser si $\mathcal{D}'$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

3. Soit $\mathcal{D}'' : x = 2t,\ y = 3 - t,\ z = t$. Montrer que $\mathcal{D}''$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ et déterminer leur point d'intersection.

Exercice 4 ***Positions relatives de plans et de droites*** **(T^{le}).**

1. On donne $\mathcal{P}_1 : x - 2y + z - 1 = 0$, $\mathcal{P}_2 : -2x + 4y - 2z + 5 = 0$ et $\mathcal{P}_3 : x + y + z = 0$. Étudier la position relative de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, puis de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ (on pourra poser $z = t$).

3. Les droites $\mathcal{D}_1 : x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3 - t$ et $\mathcal{D}_2 : x = 2 + s$, $y = 1 - s$, $z = 4 + 2s$ sont-elles parallèles ? sécantes ? non coplanaires ?

Exercice 5 ***Projeté orthogonal et distance*** **(T^{le}).**

1. Déterminer le projeté orthogonal H de M(1 ; 2 ; 3) sur le plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 3 = 0$, puis la distance de M à $\mathcal{P}$.

2. Déterminer le projeté orthogonal K de A(2 ; 3 ; 1) sur la droite $\mathcal{D} : x = t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$, puis la distance de A à $\mathcal{D}$.

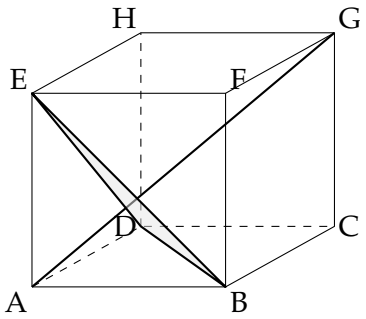
3. Pourquoi H est-il le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M ? (On pourra considérer un autre point N de $\mathcal{P}$ et le triangle MHN.)

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 6 ***Problème en contexte : la grande diagonale du cube*** (T^{le})**.** ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On se place dans le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées des points B, D, E et G.

. . . . . .

2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (BDE) et en déduire une équation cartésienne de ce plan.

3. Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE), puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection I.

4. Calculer la distance du point A au plan (BDE).

5. En déduire le volume du tétraèdre ABDE sachant que le triangle BDE est équilatéral de côté $\sqrt{2}$ (aire $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Retrouver ce volume par une autre méthode.

Exercice 7 ***Problème en contexte : un rayon de soleil sur un panneau*** (T^{le})**.** Dans un repère orthonormé (unité : le mètre), un panneau solaire est le parallélogramme ABCD avec A(0 ; 0 ; 2), B(4 ; 0 ; 2) et D(0 ; 3 ; 4). Un rayon de soleil suit la droite $\mathcal{R}$ passant par S(1 ; 4 ; 7) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABD) et qu'une équation de ce plan est $2y - 3z + 6 = 0$.

2. Le rayon est-il parallèle au panneau ? Est-il orthogonal au panneau ?

3. Déterminer les coordonnées du point I où le rayon rencontre le plan (ABD).

4. Le point I appartient au panneau si $\overrightarrow{AI} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Le rayon touche-t-il effectivement le panneau ?

Exercice 8 ***QCM*** **(*T^{le}*).** Pour chaque question, entourer la seule réponse correcte, puis justifier en une phrase.

1. Un vecteur normal au plan d'équation $3x - y + 2z - 7 = 0$ est :

   A. $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$ **B.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **C.** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ **D.** $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   .....

2. La droite de représentation paramétrique $x = 1 + 2t$, $y = -t$, $z = 3$ passe par le point :

   A. $(3 \ ; -1 \ ; 3)$ **B.** $(1 \ ; 0 \ ; 0)$ **C.** $(2 \ ; -1 \ ; 3)$ **D.** $(1 \ ; -1 \ ; 3)$

   .....

3. La droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont tels que :

   A. $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$

   B. $\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$ sans lui être orthogonale

   C. $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ (incluse ou strictement parallèle)

   D. $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$

   .....

4. La distance du point M(1 ; 1 ; 1) au plan d'équation $z = 4$ vaut :

A. 4 **B.** 3 **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

. . . . . .

Exercice 9 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une droite de l'espace admet une unique représentation paramétrique.

B. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, où $\vec{u}$ dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.

C. Deux plans dont les vecteurs normaux sont colinéaires sont parallèles.

D. Dans l'espace, l'équation $x + y - 3 = 0$ définit une droite.

E. Le projeté orthogonal H de M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.

F. Deux droites de l'espace qui ne sont pas parallèles sont sécantes.

G. Un plan admet une infinité de vecteurs normaux, tous colinéaires entre eux.

H. Le plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ passe par l'origine du repère.