La dérivation

Dériver une fonction, c'est mesurer la rapidité avec laquelle elle varie. Le nombre dérivé en un point est la pente de la tangente à la courbe en ce point : il dit si la fonction monte, descend, et à quelle vitesse. Tout l'intérêt de la dérivation est là : le signe de la dérivée donne les variations de la fonction, ce qui permet de trouver les maximums et les minimums. La difficulté principale est d'appliquer correctement les formules, surtout celle du produit et celle du quotient.

Prérequis : Fonctions, Calcul littéral. **Pour s'entraîner :** Exercices : dérivation.

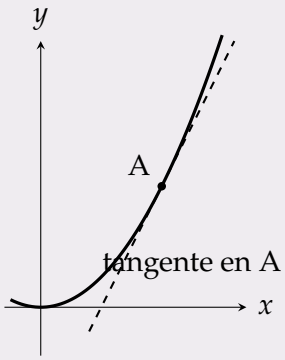
Propriété 1 (Nombre dérivé et tangente, 1re)

Nombre dérivé : le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, est la limite du taux de variation :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Interprétation graphique : $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a.

Équation de la tangente : la tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.



Exercice 1 *Lire et utiliser un nombre dérivé (1re)*

1. La tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 3x - 1$. Donner $f'(2)$ et $f(2)$.
2. On donne $f(1) = 4$ et $f'(1) = -2$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. Compléter : si $f'(a) = 0$, alors la tangente au point d'abscisse a est ...
4. On considère $f(x) = x^2$ et $a = 3$. Compléter le calcul du nombre dérivé à partir du taux de variation :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - \dots}{h} = \frac{9 + \dots + h^2 - 9}{h} = \frac{\dots + h^2}{h} = \dots + h.$$

Lorsque h tend vers 0, ce quotient tend vers ..., donc $f'(3) = \dots$

Propriété 2 (Dérivées des fonctions de référence, 1re)

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^n (avec n entier)	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$)	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$ (avec $x > 0$)	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 2 *Dériver avec les formules de référence (1re)*

1. Dériver chaque fonction (préciser le domaine si nécessaire) :

a) $f(x) = x^4$ b) $g(x) = 7$ c) $h(x) = x$

d) $k(x) = x^7$ e) $m(x) = \frac{1}{x}$ f) $n(x) = \sqrt{x}$

2. On considère $p(x) = x^3$. Calculer $p'(2)$, puis déterminer l'équation de la tangente à la courbe de p au point d'abscisse 2.

Propriété 3 (Opérations sur les dérivées, 1re)

On note u et v deux fonctions dérivables, et k un réel.

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\,u$	$k\,u'$
$u\,v$	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$ (avec $v\neq 0$)	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

La formule du produit et celle du quotient sont les deux sources d'erreurs les plus fréquentes : il faut les écrire en entier avant de remplacer.

Méthode : calculer une fonction dérivée

1. Reconnaître la structure de f (somme, produit, quotient).
2. Identifier u, v et leurs dérivées u', v'.
3. Appliquer la formule correspondante, puis réduire.

Exemple. Dériver $g(x)=(2x+1)(x^2-3)$.
C'est un produit : on pose $u=2x+1$ et $v=x^2-3$, donc $u'=2$ et $v'=2x$.

$$g'(x)=u'v+uv'=2(x^2-3)+(2x+1)(2x)$$
$$g'(x)=2x^2-6+4x^2+2x$$
$$g'(x)=6x^2+2x-6.$$

Exercice 3 *Dériver une somme, un produit, un quotient (1re)*

1. On veut dériver $g(x)=(x^2+1)(3x-2)$. Compléter : on pose $u=\ldots$ et $v=\ldots$, donc $u'=\ldots$ et $v'=\ldots$ Alors

$$g'(x)=u'v+uv'=\ldots\times(3x-2)+(x^2+1)\times\ldots=\ldots$$

2. Dériver les fonctions suivantes.

a) $f(x)=4x^3-2x^2+7x-1$

b) $g(x)=(3x-2)(x+5)$

c) $h(x)=\dfrac{x}{x+1}$

d) $k(x)=5\sqrt{x}+\dfrac{2}{x}$

e) $m(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+3}$

f) $n(x)=(x^2-1)(x^2+1)$

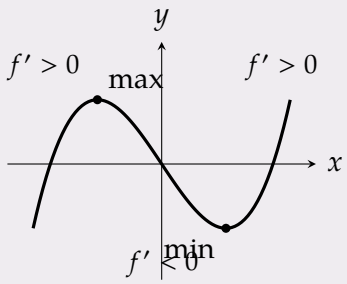
3. Vérifier le résultat obtenu pour n en développant d'abord $n(x)$, puis en dérivant.

Propriété 4 (Dérivée et variations, 1re)

Sur un intervalle I :

- si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est croissante sur I ;
- si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est décroissante sur I ;
- si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum (maximum ou minimum) en a.

Étudier les variations d'une fonction revient donc à étudier le **signe de sa dérivée**.



Exemple. Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, qui s'annule en -1 et 1. Comme $a = 3 > 0$, $f'(x)$ est positif à l'extérieur de $[-1\ ;\ 1]$ et négatif à l'intérieur. On dresse alors le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

La fonction f admet ainsi un maximum local égal à 2 en -1, et un minimum local égal à -2 en 1.

Exercice 4 *Tangente et variations (1re)* On considère $f(x) = x^2 - 4x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2. Que remarque-t-on ?

Exercice 5 *Étudier les variations d'une fonction du troisième degré (1re)* On considère $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f et préciser ses extremums locaux.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 6 *Problème en contexte (1re)* Une entreprise produit x centaines d'objets. Son coût moyen de production, en euros par objet, est modélisé par $C(x) = x^2 - 8x + 20$ pour $x \in]0\ ;\ 10]$.

1. Calculer $C'(x)$.
2. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût minimal ?
3. Justifier que c'est bien un minimum à l'aide du signe de $C'(x)$, puis dresser le tableau de variations de C.
4. Calculer C(2) et C(6). Ces résultats sont-ils cohérents avec le tableau de variations ?

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Dériver un produit terme à terme	$(uv)' = u'v'$	$(uv)' = u'v + uv'$
Oublier l'exposant $n-1$	$(x^5)' = 5x^5$	$(x^5)' = 5x^4$
Se tromper de signe sur $\frac{1}{x}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
Confondre f et f' pour les variations	étudier le signe de f	on étudie le signe de f'

Exercice 7 *QCM (1re)* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. La dérivée de $f(x) = x^3 - 5x$ est :

   A. $3x^2 - 5x$ **B.** $3x^3 - 5$ **C.** $3x^2 - 5$ **D.** $x^2 - 5$

2. Si $f'(4) = 0$, alors :

   A. $f(4) = 0$ **B.** la tangente au point d'abscisse 4 est horizontale

C. f admet nécessairement un extremum en 4

D. la courbe coupe l'axe des abscisses en 4

3. La dérivée de $g(x) = (2x+1)(x-3)$ est :

A. 2 **B.** $2x-5$ **C.** $4x-7$ **D.** $4x-5$

4. Si $f'(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 2$, alors f admet en 2 :

A. un minimum **B.** un maximum

C. ni minimum ni maximum **D.** une tangente verticale

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. La dérivée de x^5 est $5x^4$.

B. La dérivée d'un produit est le produit des dérivées.

C. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

D. Si f est croissante sur un intervalle, alors $f'(x) > 0$ pour tout x de cet intervalle.

E. La dérivée de $\dfrac{1}{x}$ est $\dfrac{1}{x^2}$.

F. La tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ au point d'abscisse 0 est l'axe des abscisses.

G. La dérivée de $3x^2 + 2$ est $6x + 2$.

H. Si $f'(x) = 2x - 6$, alors f admet un minimum en $x = 3$.

Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche ***Que faire quand je bloque ?***
Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche ***Mémorisation et sciences cognitives****.*
Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton ***Carnet d'erreurs****.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente : $f'(2) = 3$. Le point de contact A$(2\ ;\ f(2))$ appartient à la tangente, donc $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$.
2. $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -2(x-1) + 4 = -2x + 2 + 4 = -2x + 6$.
3. Si $f'(a) = 0$, le coefficient directeur de la tangente est nul : la tangente est **horizontale**, d'équation $y = f(a)$.
4. On développe $(3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$:

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

Lorsque h tend vers 0, $6 + h$ tend vers 6, donc $f'(3) = 6$. On retrouvera ce résultat avec la formule $(x^2)' = 2x$: $2 \times 3 = 6$. ✓

Corrigé de l'exercice 2.

1.

a) $f'(x) = 4x^3$ (formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ avec $n = 4$).

b) $g'(x) = 0$ (la dérivée d'une constante est nulle).

c) $h'(x) = 1$.

d) $k'(x) = 7x^6$.

e) $m'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, pour $x \neq 0$.

f) $n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pour $x > 0$.

2. $p'(x) = 3x^2$, donc $p'(2) = 3 \times 4 = 12$ et $p(2) = 8$. La tangente a pour équation $y = p'(2)(x-2) + p(2) = 12(x-2) + 8 = 12x - 16$.

Corrigé de l'exercice 3.

1. On pose $u = x^2 + 1$ et $v = 3x - 2$, donc $u' = 2x$ et $v' = 3$. Alors

$$g'(x) = u'v + uv' = 2x \times (3x-2) + (x^2+1) \times 3$$
$$g'(x) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3$$
$$g'(x) = 9x^2 - 4x + 3.$$

2.

a) Somme de termes de référence : $f'(x) = 12x^2 - 4x + 7$.

b) Produit avec $u = 3x - 2$, $v = x + 5$, $u' = 3$, $v' = 1$:

$$g'(x) = u'v + uv' = 3(x + 5) + (3x - 2) \times 1$$
$$g'(x) = 3x + 15 + 3x - 2 = 6x + 13.$$

c) Quotient avec $u = x$, $v = x + 1$, $u' = 1$, $v' = 1$ (pour $x \neq -1$) :

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \times (x + 1) - x \times 1}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

d) Somme de deux termes de la forme $k\,u$: $k'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$, pour $x > 0$.

e) Quotient avec $u = 2x + 1$, $v = x^2 + 3$, $u' = 2$, $v' = 2x$ (le dénominateur ne s'annule jamais) :

$$m'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(x^2 + 3) - (2x + 1)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$$
$$m'(x) = \frac{2x^2 + 6 - 4x^2 - 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 6}{(x^2 + 3)^2}.$$

f) Produit avec $u = x^2 - 1$, $v = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $v' = 2x$:

$$n'(x) = u'v + uv' = 2x(x^2 + 1) + (x^2 - 1)(2x)$$
$$n'(x) = 2x^3 + 2x + 2x^3 - 2x = 4x^3.$$

3. En développant, $n(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$, dont la dérivée est $4x^3$. Les deux méthodes donnent le même résultat. ✓

Corrigé de l'exercice 4.

1. $f'(x) = 2x - 4$.
2. $f'(0) = -4$ et $f(0) = 1$. La tangente a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -4x + 1$.
3. $f'(x) = 2x - 4 = 0 \iff x = 2$. Comme le coefficient de x est positif, $f'(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 2$. La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2]$ puis croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$, et $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f'(2) = 0$ et $f(2) = -3$, donc la tangente a pour équation $y = 0 \times (x-2) - 3 = -3$. C'est une droite horizontale : au minimum de la fonction, la tangente est horizontale, ce qui correspond bien à $f'(2) = 0$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. En développant, $3(x-1)(x-3) = 3(x^2 - 3x - x + 3) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$. ✓
2. $f'(x)$ est un trinôme de coefficient dominant $3 > 0$, de racines 1 et 3 : il est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles. Donc $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$, $f'(x) < 0$ sur $]1\ ;\ 3[$ et $f'(x) > 0$ sur $]3\ ;\ +\infty[$.
3. On calcule $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	1	↗	$+\infty$

   La fonction f admet un maximum local égal à 5 en $x = 1$ et un minimum local égal à 1 en $x = 3$.
4. $f'(0) = 9$ et $f(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = 9(x-0) + 1 = 9x + 1$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $C'(x) = 2x - 8$.
2. $C'(x) = 0 \iff x = 4$. Le coût moyen est minimal pour $x = 4$, soit quatre cents objets, et vaut $C(4) = 16 - 32 + 20 = 4$ euros par objet.
3. $C'(x) = 2x - 8$ est négatif pour $x < 4$ et positif pour $x > 4$: C décroît puis croît, donc $x = 4$ correspond bien à un minimum. Aux bornes, $C(10) = 100 - 80 + 20 = 40$ et $C(x)$ tend vers 20 quand x se rapproche de 0 :

x	0		4		10
$C'(x)$		$-$	0	$+$	
$C(x)$	20	↘	4	↗	40

4. $C(2) = 4 - 16 + 20 = 8$ et $C(6) = 36 - 48 + 20 = 8$. Ces deux valeurs sont égales et supérieures au minimum 4 : 2 et 6 sont symétriques par rapport à 4, et le coût moyen a bien diminué de 8 à 4 entre 2 et 4, puis remonté de 4 à 8 entre 4 et 6. C'est cohérent avec le tableau.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse C.** $(x^3)' = 3x^2$ et $(5x)' = 5$, donc $f'(x) = 3x^2 - 5$.
   - A : le terme $5x$ n'a pas été dérivé (sa dérivée est 5, pas $5x$).
   - B : l'exposant n'a pas été diminué (x^3 donne $3x^2$, pas $3x^3$).
   - D : le coefficient $n = 3$ de la formule nx^{n-1} a été oublié.
2. **Réponse B.** Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente ; s'il est nul, la tangente est horizontale.
   - A et D : confusion entre f et f' ; $f'(4) = 0$ ne renseigne pas sur la valeur de $f(4)$, donc pas sur le passage de la courbe par l'axe des abscisses.
   - C : il faut en plus que f' change de signe. Contre-exemple : $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais n'a pas d'extremum en 0.
3. **Réponse D.** Avec $u = 2x + 1$, $v = x - 3$, $u' = 2$, $v' = 1$: $g'(x) = u'v + uv' = 2(x - 3) + (2x + 1) \times 1 = 2x - 6 + 2x + 1 = 4x - 5$. Vérification : $g(x) = 2x^2 - 5x - 3$, dont la dérivée est $4x - 5$. ✓
   - A : produit des dérivées $u'v' = 2 \times 1$, formule fausse.
   - B : le terme uv' a été oublié, on a calculé $u'v + v'$.
   - C : erreur de calcul, $-6 + 1 = -5$ et non -7.
4. **Réponse A.** La fonction décroît avant 2 puis croît après : elle admet un minimum en 2.
   - B : sens inversé, un maximum correspond à f' positive puis négative.
   - C : f' change de signe en 2, il y a donc bien un extremum.
   - D : en 2, $f'(2) = 0$, la tangente est horizontale et non verticale.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Vrai. Formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ avec $n = 5$.

B. Faux. $(uv)' = u'v + uv'$. Contre-exemple avec $u = v = x$: $(x \times x)' = (x^2)' = 2x$, alors que $u'v' = 1 \times 1 = 1$.

C. Vrai. C'est l'interprétation graphique du nombre dérivé.

D. Faux. La dérivée peut s'annuler en certains points : $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, mais $f'(0) = 0$. On a seulement $f'(x) \geqslant 0$.

E. Faux. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. Le signe moins est indispensable : la fonction inverse est décroissante sur chacun de ses intervalles de définition, sa dérivée est donc négative.

F. Vrai. $f'(x) = 2x$, donc $f'(0) = 0$, et $f(0) = 0$. La tangente a pour équation $y = 0$, c'est l'axe des abscisses.

G. Faux. La dérivée d'une constante est nulle : $(3x^2 + 2)' = 6x + 0 = 6x$.

H. Vrai. $f'(x) = 2x - 6$ s'annule en 3, est négative avant et positive après : f décroît puis croît, elle admet un minimum en 3.