La dérivation — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la dérivation. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver les formules de dérivation et le lien entre le signe de la dérivée et les variations. Écris toujours la formule en entier avant de remplacer.

Exercice 1 ***Lire et utiliser un nombre dérivé*** **(*1re*).**

1. La tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse 2 a pour équation $y = 3x - 1$. Donner $f'(2)$ et $f(2)$.
   $f'(2) =$ ..... car .....
   $f(2) =$ .....
2. On donne $f(1) = 4$ et $f'(1) = -2$. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
   $y = f'(1)(x-1) + f(1) =$ .....
3. Compléter : si $f'(a) = 0$, alors la tangente au point d'abscisse a est .....
4. On considère $f(x) = x^2$ et $a = 3$. Compléter le calcul du nombre dérivé à partir du taux de variation :

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - \ldots\ldots}{h} = \frac{9 + \ldots\ldots + h^2 - 9}{h}$$

$$= \frac{\ldots\ldots + h^2}{h} = \ldots\ldots + h.$$

Lorsque h tend vers 0, ce quotient tend vers ..... , donc $f'(3) =$ .....

Exercice 2 ***Dériver avec les formules de référence*** **(*1re*).**

1. Dériver chaque fonction (préciser le domaine si nécessaire) :

   a) $f(x) = x^4$ $\quad f'(x) =$ ..... $\quad$ b) $g(x) = 7$ $\quad g'(x) =$ .....

   c) $h(x) = x$ $\quad h'(x) =$ ..... $\quad$ d) $k(x) = x^7$ $\quad k'(x) =$ .....

   e) $m(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad m'(x) =$ ..... $\quad$ f) $n(x) = \sqrt{x}$ $\quad n'(x) =$ .....

2. On considère $p(x) = x^3$. Calculer $p'(2)$, puis déterminer l'équation de la tangente à la courbe de p au point d'abscisse 2.

Exercice 3 ***Dériver une somme, un produit, un quotient*** **(*1re*).**

1. On veut dériver $g(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$. Compléter : on pose $u =$ ..... et $v =$ ..... donc $u' =$ ..... et $v' =$ .....
   $g'(x) = u'v + uv' =$ ..... $\times (3x - 2) + (x^2 + 1) \times$ ..... = ...

2. Dériver les fonctions suivantes.
   a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x - 1$

   .....

   b) $g(x) = (3x - 2)(x + 5)$

   c) $h(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

   d) $k(x) = 5\sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$

   e) $m(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 3}$

   f) $n(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

3. Vérifier le résultat obtenu pour n en développant d'abord $n(x)$, puis en dérivant.

   .....

   .....

Exercice 4 ***Tangente et variations*** **(*1re*).** On considère $f(x) = x^2 - 4x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$.

   .....

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2. Que remarque-t-on ?

Exercice 5 ***Étudier les variations d'une fonction du troisième degré*** **(*1re*).** On considère $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$.

3. Dresser le tableau de variations de f et préciser ses extremums locaux.

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

Exercice 6 ***Problème en contexte*** **(*1re*).** Une entreprise produit x centaines d'objets. Son coût moyen de production, en euros par objet, est modélisé par $C(x) = x^2 - 8x + 20$ pour $x \in]0\ ;\ 10]$.

1. Calculer $C'(x)$.

   .....

2. Pour quelle production le coût moyen est-il minimal ? Quel est ce coût minimal ?

3. Justifier que c'est bien un minimum à l'aide du signe de $C'(x)$, puis dresser le tableau de variations de C.

4. Calculer C(2) et C(6). Ces résultats sont-ils cohérents avec le tableau de variations ?

Exercice 7 ***QCM*** **(*1re*).** Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. La dérivée de $f(x) = x^3 - 5x$ est :

   A. $3x^2 - 5x$ **B.** $3x^3 - 5$ **C.** $3x^2 - 5$ **D.** $x^2 - 5$

2. Si $f'(4) = 0$, alors :

   A. $f(4) = 0$

   B. la tangente au point d'abscisse 4 est horizontale

   C. f admet nécessairement un extremum en 4

   D. la courbe coupe l'axe des abscisses en 4

3. La dérivée de $g(x) = (2x + 1)(x - 3)$ est :

   A. 2 **B.** $2x - 5$ **C.** $4x - 7$ **D.** $4x - 5$

4. Si $f'(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 2$, alors f admet en 2 :

   A. un minimum

   B. un maximum

   C. ni minimum ni maximum

   D. une tangente verticale

Exercice 8 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. La dérivée de x^5 est $5x^4$.

B. La dérivée d'un produit est le produit des dérivées.

C. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

D. Si f est croissante sur un intervalle, alors $f'(x) > 0$ pour tout x de cet intervalle.

E. La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $\frac{1}{x^2}$.

F. La tangente à la courbe de $f(x) = x^2$ au point d'abscisse 0 est l'axe des abscisses.

G. La dérivée de $3x^2 + 2$ est $6x + 2$.

H. Si $f'(x) = 2x - 6$, alors f admet un minimum en $x = 3$.