Dénombrement

Compter, c'est facile quand il y a cinq objets ; c'est un art quand il y a des millions de codes possibles, de mains de cartes ou de classements. Le **dénombrement** donne des méthodes pour compter sans énumérer, à partir d'un seul principe : quand une situation se décompose en étapes successives, le nombre de possibilités se **multiplie**. De ce principe découlent trois familles de nombres : les k-uplets (on peut répéter, l'ordre compte), les arrangements et permutations (pas de répétition, l'ordre compte) et les combinaisons (pas de répétition, l'ordre ne compte pas). Toute la difficulté est de reconnaître la bonne famille : deux questions suffisent, « peut-on répéter ? » et « l'ordre compte-t-il ? ». Ce chapitre prolonge la loi binomiale, dont les coefficients sont précisément des combinaisons, et il alimente le calcul des probabilités dans les situations d'équiprobabilité.

Prérequis : Probabilités conditionnelles, La loi binomiale. **Pour s'entraîner :** Exercices : dénombrement.

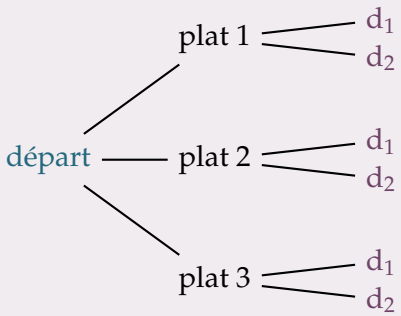
Propriété 1 (Principe multiplicatif et k-uplets, T^le^)

Principe multiplicatif : si une situation se décompose en k étapes successives offrant respectivement n_1, n_2, ..., n_k possibilités (indépendamment des choix précédents), le nombre total de possibilités est le produit $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Produit cartésien : si A a n éléments et B en a p, l'ensemble A $\times$ B des couples $(a\ ;\ b)$ a $n \times p$ éléments.

k-uplets : le nombre de listes ordonnées de k éléments choisis parmi n, **avec répétition possible**, est n^k. Exemple : 10^4 codes à quatre chiffres.

Parties d'un ensemble : un ensemble à n éléments possède 2^n parties (pour chaque élément, deux choix : le prendre ou non).



3 plats $\times$ 2 desserts = 6 menus

Exercice 1 *Compter avec le principe multiplicatif (T^{le})*

1. Un menu propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Combien de menus complets peut-on composer ?
2. Combien y a-t-il de codes de carte bancaire à 4 chiffres ? de mots de passe formés de 3 lettres (parmi 26) suivies de 2 chiffres ?
3. Un questionnaire comporte 10 questions à 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on le remplir au hasard ? Quelle est la probabilité d'obtenir tout juste ?
4. Combien de parties possède un ensemble à 5 éléments ? Combien de sous-ensembles non vides ?

Propriété 2 (Permutations et arrangements, T^{le})

Factorielle : pour $n \geqslant 1$, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$, et par convention $0! = 1$. Exemples : $3! = 6$, $5! = 120$, $10! = 3\,628\,800$.

Permutations : le nombre de façons d'ordonner n éléments distincts (de les ranger tous) est $n!$.

Arrangements : le nombre de listes ordonnées de k éléments **distincts** choisis parmi n (sans répétition, l'ordre compte) est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Lecture : k facteurs décroissants à partir de n : n choix pour la première place, $n-1$ pour la deuxième, etc.

Exemple. Podium (or, argent, bronze) parmi 8 coureurs : $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles. Ordre d'arrivée complet des 8 coureurs : $8! = 40\,320$.

Exercice 2 *Permutations et arrangements, étape par étape (T^{le})*

1. Compléter : pour former un podium avec 3 des 8 coureurs, il y a ... choix pour la première place, puis ... pour la deuxième, puis ... pour la troisième : ...×...×... = ... podiums.
2. Combien d'anagrammes (mots ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres du mot MATHS ?
3. De combien de façons peut-on ranger 6 livres différents sur une étagère ? Et si un livre précis doit être à gauche ?
4. On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne qui en contient 10, toutes différentes. Combien de tirages ordonnés ?
5. De combien de façons peut-on attribuer 4 rôles différents à 4 personnes choisies parmi 7 ?

Propriété 3 (Combinaisons, T^le)

Définition : une combinaison de k éléments parmi n est une **partie** à k éléments d'un ensemble à n éléments : pas de répétition, et l'ordre ne compte pas. Leur nombre est le coefficient binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Pourquoi diviser par $k!$: chaque partie à k éléments correspond à $k!$ arrangements (ses différents ordres). On compte les arrangements, puis on retire l'ordre.

Propriétés : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, relation de Pascal $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Lien avec la loi binomiale : $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins à k succès dans un arbre à n épreuves.

Méthode : choisir le bon modèle en deux questions

	L'ordre compte	**L'ordre ne compte pas**
Répétition possible	k-uplets : n^k	(hors programme)
Sans répétition	arrangements : $\frac{n!}{(n-k)!}$ (permutations si $k = n$: $n!$)	combinaisons : $\binom{n}{k}$

Test pratique : si échanger deux éléments choisis donne la **même** issue (même comité, même main), l'ordre ne compte pas.

Exemple. Choisir 3 délégués parmi 25 élèves (tous les délégués ont le même rôle) : $\binom{25}{3} = \frac{25 \times 24 \times 23}{3 \times 2 \times 1} = 2\,300$. Si les trois rôles étaient différents (titulaire, premier et second suppléants), on compterait $25 \times 24 \times 23 = 13\,800$.

Exercice 3 *Calculer des combinaisons* (T^{le})

1. Calculer $\binom{10}{3}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{7}{7}$, $\binom{9}{8}$ et $\binom{12}{10}$ (utiliser la symétrie pour ce dernier).
2. Combien de mains de 5 cartes peut-on former avec un jeu de 32 cartes ?
3. Un comité de 5 personnes doit comporter exactement 2 filles choisies parmi 12 et 3 garçons choisis parmi 15. Combien de comités ?
4. Vérifier la relation de Pascal sur l'exemple $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=\binom{6}{3}$, puis retrouver $\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}=2^4$ en calculant chaque terme.

Exercice 4 *L'ordre compte-t-il ?* (T^{le}) Pour chaque situation, identifier le modèle (k-uplets, arrangements, permutations ou combinaisons) et calculer le nombre de possibilités.

1. Tiercé dans l'ordre : les trois premiers chevaux, dans l'ordre, d'une course à 15 partants.
2. Tiercé dans le désordre : les trois premiers chevaux, sans tenir compte de l'ordre.
3. Un code de 3 chiffres tous différents.
4. Un code de 3 chiffres quelconques.
5. Une équipe de 5 joueurs choisis parmi 12.
6. Le classement final complet de 12 équipes.

Exercice 5 *Dénombrer pour calculer des probabilités* (T^{le}) Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Pourquoi sont-ils équiprobables ?
2. Calculer la probabilité de tirer 3 boules rouges, puis celle de tirer exactement 2 rouges.
3. Calculer la probabilité de tirer au moins une verte.
4. Sur un quadrillage, on va du point $(0\ ;\ 0)$ au point $(4\ ;\ 3)$ en ne faisant que des pas vers la droite ou vers le haut. Combien de chemins ? Expliquer le lien avec la loi binomiale.

Exercice 6 *Problème en contexte : la force d'un mot de passe (T^{le})* Un mot de passe utilise des caractères pris parmi 26 minuscules, 26 majuscules et 10 chiffres, soit 62 caractères. Un attaquant teste 10^9 mots de passe par seconde.

1. Combien de mots de passe de 8 caractères existe-t-il ? Combien de temps faut-il, au plus, pour les essayer tous ? (Donner le résultat en jours.)
2. Combien de mots de passe de 8 caractères contiennent au moins un chiffre ?
3. Reprendre la question 1 avec 12 caractères. Conclure.
4. Un site impose 8 caractères exactement, tous différents. Cela augmente-t-il ou diminue-t-il le nombre de mots de passe possibles ? Le calculer.

Exercice 7 *Problème en contexte : poignées de main, matchs et diagonales (T^{le})*

1. Dans une réunion de 15 personnes, chacun serre la main de tous les autres une fois. Combien de poignées de main ?
2. Un tournoi réunit 10 équipes ; chaque équipe rencontre chacune des autres une fois. Combien de matchs ? Et si chaque rencontre se joue en aller-retour ?
3. Combien de diagonales possède un polygone convexe à n sommets ? Vérifier pour le pentagone (5 diagonales) et calculer pour un polygone à 20 sommets.
4. On place 8 points dans le plan, trois quelconques jamais alignés. Combien de triangles ont pour sommets trois de ces points ?

Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Compter l'ordre quand il ne compte pas	« 3 délégués parmi 25 : $25 \times 24 \times 23$ »	le comité est le même quel que soit l'ordre : $\binom{25}{3} = 2\,300$
Oublier « sans remise »	« 3 boules tirées sans remise parmi 10 : 10^3 »	pas de répétition : $10 \times 9 \times 8$
Confondre $\binom{n}{k}$ et n^k	« $\binom{10}{3} = 1\,000$ »	$\binom{10}{3} = 120$: on choisit un sous-ensemble, pas une liste
Compter deux fois	« au moins 1 rouge : on prend 1 rouge puis 2 boules quelconques »	la même main est comptée plusieurs fois ; passer par le contraire ou par les cas disjoints
Multiplier au lieu d'additionner	« 2 filles ou 3 garçons » traité comme un produit	« ou » entre cas disjoints se traduit par une **somme**, « et » (étapes successives) par un produit

Exercice 8 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Le nombre de codes à 4 chiffres tous différents est :

   A. 10^4 **B.** $10 \times 9 \times 8 \times 7$ **C.** $\binom{10}{4}$ **D.** $4!$

2. $\binom{7}{2}$ vaut :

   A. 14 **B.** 42 **C.** 49 **D.** 21

3. Le nombre de façons de choisir 2 délégués (de même rôle) parmi 30 élèves est :

   A. $\binom{30}{2} = 435$ **B.** $30 \times 29 = 870$ **C.** $30^2 = 900$ **D.** 2^{30}

4. Un ensemble à 4 éléments possède :

   A. $4! = 24$ parties **B.** $4^2 = 16$ parties **C.** $2^4 = 16$ parties **D.** $\binom{4}{2} = 6$ parties

Exercice 9 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. $0! = 1$.

B. Pour tout $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$.

C. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

D. Le nombre d'arrangements de 2 éléments parmi n est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

E. Un ensemble à 10 éléments possède 100 parties.

F. $5! = 120$.

G. Il y a $10 \times 9 \times 8$ façons de former un comité de 3 personnes parmi 10.

H. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus.
2. Codes : $10^4 = 10\,000$. Mots de passe : $26^3 \times 10^2 = 17\,576 \times 100 = 1\,757\,600$.
3. $4^{10} = 1\,048\,576$ façons. Une seule est entièrement juste : probabilité $\dfrac{1}{4^{10}} \approx 9{,}5 \times 10^{-7}$.
4. $2^5 = 32$ parties, dont l'ensemble vide : 31 sous-ensembles non vides.

Corrigé de l'exercice 2.

1. 8 choix, puis 7, puis 6 : $8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums.
2. Les 5 lettres sont distinctes : $5! = 120$ anagrammes.
3. $6! = 720$ rangements. Si un livre est fixé à gauche, il reste $5! = 120$ rangements pour les autres.
4. $10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages ordonnés (arrangements de 3 parmi 10).
5. $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ (arrangements de 4 parmi 7 : les rôles sont distincts, l'ordre compte).

Corrigé de l'exercice 3.

1. $\binom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$; $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15$; $\binom{7}{7} = 1$; $\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9$; $\binom{12}{10} = \binom{12}{2} = \dfrac{12 \times 11}{2} = 66$.
2. $\binom{32}{5} = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{120} = 201\,376$ mains.
3. Choix indépendants, principe multiplicatif : $\binom{12}{2} \times \binom{15}{3} = 66 \times 455 = 30\,030$ comités.
4. $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$ et $\binom{6}{3} = 20 = 10 + 10$. ✓ Ensuite $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$: c'est le nombre total de parties d'un ensemble à 4 éléments, classées selon leur taille. ✓

Corrigé de l'exercice 4.

1. Arrangements de 3 parmi 15 : $15 \times 14 \times 13 = 2\,730$.
2. Combinaisons : $\binom{15}{3} = \dfrac{2\,730}{6} = 455$. On retrouve le résultat précédent divisé par 3!.
3. Arrangements de 3 parmi 10 : $10 \times 9 \times 8 = 720$.
4. 3-uplets de chiffres : $10^3 = 1\,000$.
5. Combinaisons (les joueurs ont le même statut) : $\binom{12}{5} = 792$.
6. Permutations : $12! = 479\,001\,600$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. $\binom{8}{3} = 56$ tirages (parties à 3 éléments de l'ensemble des 8 boules). Les boules étant indiscernables au toucher, chaque partie a la même chance d'être tirée.
2. P(3 rouges) $= \dfrac{\binom{5}{3}}{56} = \dfrac{10}{56} = \dfrac{5}{28}$. P(exactement 2 rouges) $= \dfrac{\binom{5}{2} \times \binom{3}{1}}{56} = \dfrac{10 \times 3}{56} = \dfrac{15}{28}$.
3. L'événement contraire est « 3 rouges » : P(au moins une verte) $= 1 - \dfrac{5}{28} = \dfrac{23}{28}$.
4. Un chemin est une suite de 7 pas dont exactement 3 vers le haut : il est déterminé par le choix des positions des 3 pas « haut » parmi 7, soit $\binom{7}{3} = 35$ chemins. De même, dans un arbre à n épreuves de Bernoulli, le nombre de chemins comportant k succès est $\binom{n}{k}$: c'est l'origine du coefficient dans $\mathrm{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $62^8 \approx 2{,}18 \times 10^{14}$ mots de passe. Temps : $\dfrac{2{,}18 \times 10^{14}}{10^9} \approx 2{,}18 \times 10^5$ s, soit environ 60 heures, c'est-à-dire 2,5 jours.
2. On compte le contraire (aucun chiffre : 52 caractères possibles) : $62^8 - 52^8 \approx 2{,}18 \times 10^{14} - 5{,}35 \times 10^{13} \approx 1{,}65 \times 10^{14}$.
3. $62^{12} \approx 3{,}23 \times 10^{21}$; temps $\approx 3{,}23 \times 10^{12}$ s, soit environ 102 000 années. Passer de 8 à 12 caractères multiplie le nombre de possibilités par $62^4 \approx 1{,}5 \times 10^7$: la longueur compte bien plus que la complexité des règles.
4. Interdire les répétitions **diminue** le nombre de possibilités : arrangements de 8 parmi 62, soit $62 \times 61 \times \cdots \times 55 \approx 1{,}36 \times 10^{14}$, contre $2{,}18 \times 10^{14}$. Une telle règle affaiblit légèrement le mot de passe.

Corrigé de l'exercice 7.

1. Une poignée de main est une paire de personnes : $\binom{15}{2} = 105$.
2. Un match est une paire d'équipes : $\binom{10}{2} = 45$ matchs. En aller-retour, l'ordre (qui reçoit) compte : $10 \times 9 = 90$ matchs, soit le double.
3. Une diagonale ou un côté relie deux sommets : $\binom{n}{2}$ segments, dont n côtés : $\binom{n}{2} - n = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales. Pentagone : $\dfrac{5 \times 2}{2} = 5$. ✓ Pour $n = 20$: $\dfrac{20 \times 17}{2} = 170$.
4. Un triangle est une partie à 3 éléments de l'ensemble des 8 points : $\binom{8}{3} = 56$ triangles.

Corrigé de l'exercice 8.

1. **Réponse B.** Sans répétition et l'ordre compte : arrangements de 4 parmi 10, soit 5 040.
   - A : 10^4 autorise les répétitions.
   - C : $\binom{10}{4} = 210$ ignore l'ordre ; or 1234 et 4321 sont des codes différents.
   - D : 4! est le nombre d'ordres de 4 chiffres déjà choisis.
2. **Réponse D.** $\binom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$.
   - A : $14 = 7 \times 2$, confusion avec un produit.
   - B : $42 = 7 \times 6$ est le nombre d'arrangements, il manque la division par 2!.
   - C : $49 = 7^2$ est le nombre de couples avec répétition.
3. **Réponse A.** Deux délégués de même rôle forment une paire non ordonnée.
   - B : 870 compte chaque paire deux fois (ordre).
   - C : 900 autorise en plus de choisir deux fois la même personne.
   - D : 2^{30} est le nombre de toutes les parties de la classe, de toutes tailles.
4. **Réponse C.** Chaque élément est pris ou non : $2^4 = 16$ parties (dont la partie vide et l'ensemble entier).
   - A : 4! compte les ordres des 4 éléments.
   - B : la valeur 16 est juste mais 4^2 n'est pas la bonne formule : pour 5 éléments elle donnerait 25 au lieu de 32.
   - D : $\binom{4}{2} = 6$ ne compte que les parties à 2 éléments.

Corrigé de l'exercice 9.

A. Vrai. C'est une convention, cohérente avec $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$.

B. Vrai. Il y a n façons de choisir un élément parmi n.

C. Vrai. Choisir les k éléments que l'on prend revient à choisir les $n - k$ que l'on laisse.

D. Faux. Les arrangements sont au nombre de $n(n-1)$; $\dfrac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ est le nombre de combinaisons.

E. Faux. $2^{10} = 1\,024$ parties.

F. Vrai. $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

G. Faux. Un comité n'est pas ordonné : $\binom{10}{3} = 120$ comités. Le nombre 720 compte chaque comité $3! = 6$ fois.

H. Vrai. En classant les 2^n parties d'un ensemble à n éléments selon leur nombre d'éléments k, on obtient $\binom{n}{k}$ parties de chaque taille.