Dénombrement — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur le dénombrement. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver le principe multiplicatif, les formules des k-uplets, des arrangements, des permutations et des combinaisons, et le tableau « l'ordre compte-t-il ? peut-on répéter ? ». Pose-toi toujours ces deux questions avant d'écrire une formule.

Exercice 1 ***Compter avec le principe multiplicatif*** **(T^{le}).**

1. Un menu propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Combien de menus complets peut-on composer ?

   .....

2. Combien y a-t-il de codes de carte bancaire à 4 chiffres ? de mots de passe formés de 3 lettres (parmi 26) suivies de 2 chiffres ?

   .....

   .....

3. Un questionnaire comporte 10 questions à 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on le remplir au hasard ? Quelle est la probabilité d'obtenir tout juste ?

   .....

   .....

4. Combien de parties possède un ensemble à 5 éléments ? Combien de sous-ensembles non vides ?

   .....

   .....

Exercice 2 ***Permutations et arrangements, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Compléter : pour former un podium avec 3 des 8 coureurs, il y a ..... choix pour la première place, puis ..... pour la deuxième, puis ..... pour la troisième : ..... × ..... × ..... = ... podiums.
2. Combien d'anagrammes (mots ayant un sens ou non) peut-on former avec les lettres du mot MATHS ?

   .....

3. De combien de façons peut-on ranger 6 livres différents sur une étagère ? Et si un livre précis doit être à gauche ?

   .....

. . . . . .

4. On tire successivement et sans remise 3 boules dans une urne qui en contient 10, toutes différentes. Combien de tirages ordonnés ?

   . . . . . .

5. De combien de façons peut-on attribuer 4 rôles différents à 4 personnes choisies parmi 7 ?

   . . . . . .

   . . . . . .

Exercice 3 ***Calculer des combinaisons*** **(*T^le^*).**

1. Compléter : $\binom{10}{3} = \frac{10 \times \ldots\ldots \times \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$; $\binom{6}{2} = \ldots\ldots$; $\binom{7}{7} = \ldots\ldots$; $\binom{9}{8} = \ldots\ldots$; $\binom{12}{10} = \binom{12}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

2. Combien de mains de 5 cartes peut-on former avec un jeu de 32 cartes ?

   . . . . . .

   . . . . . .

3. Un comité de 5 personnes doit comporter exactement 2 filles choisies parmi 12 et 3 garçons choisis parmi 15. Combien de comités ?

4. Vérifier la relation de Pascal sur l'exemple $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{6}{3}$, puis retrouver $\sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} = 2^4$ en calculant chaque terme.

Exercice 4 ***L'ordre compte-t-il ?*** **(*T^le^*).** Pour chaque situation, identifier le modèle (k-uplets, arrangements, permutations ou combinaisons) et calculer le nombre de possibilités.

1. Tiercé dans l'ordre : les trois premiers chevaux, dans l'ordre, d'une course à 15 partants.

   . . . . . .

2. Tiercé dans le désordre : les trois premiers chevaux, sans tenir compte de l'ordre.

   . . . . . .

3. Un code de 3 chiffres tous différents.

   . . . . . .

4. Un code de 3 chiffres quelconques.

   . . . . . .

5. Une équipe de 5 joueurs choisis parmi 12.

   . . . . . .

6. Le classement final complet de 12 équipes.

   . . . . . .

Exercice 5 ***Dénombrer pour calculer des probabilités*** **(*T^le*).** Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes, indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Pourquoi sont-ils équiprobables ?

2. Calculer la probabilité de tirer 3 boules rouges, puis celle de tirer exactement 2 rouges.

3. Calculer la probabilité de tirer au moins une verte.

4. Sur un quadrillage, on va du point $(0\ ;\ 0)$ au point $(4\ ;\ 3)$ en ne faisant que des pas vers la droite ou vers le haut. Combien de chemins ? Expliquer le lien avec la loi binomiale.

Exercice 6 ***Problème en contexte : la force d'un mot de passe*** **(*T^le*).** Un mot de passe utilise des caractères pris parmi 26 minuscules, 26 majuscules et 10 chiffres, soit 62 caractères. Un attaquant teste 10^9 mots de passe par seconde.

1. Combien de mots de passe de 8 caractères existe-t-il ? Combien de temps faut-il, au plus, pour les essayer tous ? (Donner le résultat en jours.)

2. Combien de mots de passe de 8 caractères contiennent au moins un chiffre ?

3. Reprendre la question 1 avec 12 caractères. Conclure.

4. Un site impose 8 caractères exactement, tous différents. Cela augmente-t-il ou diminue-t-il le nombre de mots de passe possibles ? Le calculer.

Exercice 7 ***Problème en contexte : poignées de main, matchs et diagonales*** **(*T^le*).**

1. Dans une réunion de 15 personnes, chacun serre la main de tous les autres une fois. Combien de poignées de main ?

   .....

   .....

2. Un tournoi réunit 10 équipes ; chaque équipe rencontre chacune des autres une fois. Combien de matchs ? Et si chaque rencontre se joue en aller-retour ?

. . . . . .

. . . . . .

3. Combien de diagonales possède un polygone convexe à n sommets ? Vérifier pour le pentagone (5 diagonales) et calculer pour un polygone à 20 sommets.

4. On place 8 points dans le plan, trois quelconques jamais alignés. Combien de triangles ont pour sommets trois de ces points ?

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 8 *QCM* (T^{le})**.** Pour chaque question, entourer la seule réponse correcte, puis justifier en une phrase.

1. Le nombre de codes à 4 chiffres tous différents est :

   A. 10^4 **B.** $10 \times 9 \times 8 \times 7$ **C.** $\binom{10}{4}$ **D.** $4!$

. . . . . .

2. $\binom{7}{2}$ vaut :

   A. 14 **B.** 42 **C.** 49 **D.** 21

. . . . . .

3. Le nombre de façons de choisir 2 délégués (de même rôle) parmi 30 élèves est :

   A. $\binom{30}{2} = 435$ **B.** $30 \times 29 = 870$ **C.** $30^2 = 900$ **D.** 2^{30}

. . . . . .

4. Un ensemble à 4 éléments possède :

   A. $4! = 24$ parties **B.** $4^2 = 16$ parties **C.** $2^4 = 16$ parties **D.** $\binom{4}{2} = 6$ parties

. . . . . .

Exercice 9 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. $0! = 1$.

B. Pour tout $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$.

C. Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

D. Le nombre d'arrangements de 2 éléments parmi n est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

E. Un ensemble à 10 éléments possède 100 parties.

F. $5! = 120$.

G. Il y a $10 \times 9 \times 8$ façons de former un comité de 3 personnes parmi 10.

H. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.