Convexité

La dérivée dit si une fonction monte ou descend. La **convexité** dit comment elle monte ou descend : en accélérant ou en freinant. Une courbe convexe « creuse vers le haut », comme une parabole tournée vers le haut ; une courbe concave « bombe », comme la courbe du logarithme. L'outil est la **dérivée seconde** : là où $f'' \geqslant 0$, la pente augmente et la fonction est convexe ; là où $f'' \leqslant 0$, elle est concave. Le point où la courbe change de côté est un **point d'inflexion**. Cette notion a deux usages : décrire une courbe finement (rendements croissants ou décroissants, accélération d'une épidémie) et démontrer des inégalités grâce aux tangentes. La difficulté principale est de ne pas confondre le signe de f', qui donne les variations, et celui de f'', qui donne la convexité.

Prérequis : Dérivation, Fonction exponentielle, Fonction logarithme. **Pour s'entraîner :** Exercices : convexité.

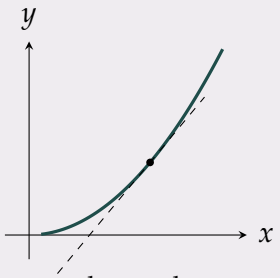
Propriété 1 (Fonctions convexes et concaves, T^le)

Soit f dérivable sur un intervalle I.

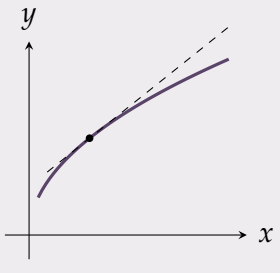
Convexe : f est convexe sur I si sa courbe est située **au-dessus** de chacune de ses tangentes sur I (et en dessous de chacune de ses cordes). Sa dérivée f' est alors croissante : la pente augmente.

Concave : f est concave sur I si sa courbe est située **en dessous** de chacune de ses tangentes. Sa dérivée f' est décroissante.

Références : x^2 et e^x sont convexes sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{x}$ et $\ln x$ sont concaves sur $]0\ ;\ +\infty[$; x^3 est concave sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$; une fonction affine est à la fois convexe et concave.



convexe : au-dessus des tangentes



concave : en dessous des tangentes

Exercice 1 *Lire la convexité (T^{le})*

1. Pour chaque fonction de référence, dire si elle est convexe ou concave sur l'intervalle indiqué, en s'appuyant sur l'allure de sa courbe : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$; $x \mapsto \ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$; $x \mapsto -x^2$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
2. La courbe d'une fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes sur $[0\ ;\ 5]$. Que peut-on dire de f sur cet intervalle ? Et de f' ?
3. Une fonction peut-elle être croissante et concave sur un même intervalle ? Donner un exemple ou expliquer pourquoi c'est impossible.

Propriété 2 (Dérivée seconde et convexité, T^{le})

Dérivée seconde : si f' est elle-même dérivable, sa dérivée est notée f'' : c'est la dérivée seconde de f. Elle mesure la vitesse de variation de la pente.

Théorème : f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x de I ; f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ sur I.

Lecture : $f'' \geqslant 0$ signifie f' croissante, donc pente qui augmente, donc courbe qui se creuse vers le haut.

Méthode : étudier la convexité d'une fonction

1. Calculer f', puis f''.
2. Étudier le signe de f'' (factoriser si nécessaire).
3. Conclure : convexe là où $f'' \geqslant 0$, concave là où $f'' \leqslant 0$; les points où f'' change de signe sont les points d'inflexion.

Exemple. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$: $f'(x) = 3x^2 - 6x$ et $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Donc $f'' < 0$ pour $x < 1$ et $f'' > 0$ pour $x > 1$: f est concave sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et convexe sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 2 *Calculer une dérivée seconde, étape par étape (T^{le})*

1. Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Compléter : $f'(x) = \ldots$, $f''(x) = \ldots = 6(x - \ldots)$. Donc $f'' \leqslant 0$ sur $\ldots$ et $f'' \geqslant 0$ sur $\ldots$: f est concave sur ... et convexe sur ...
2. Calculer la dérivée seconde et étudier la convexité de chaque fonction.

   a) $g(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$

   b) $h(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$

   c) $k(x) = \ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$

   d) $m(x) = -x^2 + 4x$ sur $\mathbb{R}$

Propriété 3 (Point d'inflexion, T^le)

Définition : un point d'inflexion est un point de la courbe où celle-ci **traverse sa tangente** : la fonction passe de concave à convexe, ou l'inverse.

Caractérisation : la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en a **en changeant de signe**.

Piège : $f''(a) = 0$ ne suffit pas. Pour $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$ mais $f'' = 12x^2$ ne change pas de signe : pas d'inflexion en 0.

Exercice 3 *Déterminer les points d'inflexion (T^{le})*

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe, puis l'équation de la tangente en ce point.
2. Soit $g(x) = x^4 - 6x^2$. Calculer $g''(x)$, le factoriser, et déterminer les points d'inflexion.
3. Soit $h(x) = x^4$. Montrer que $h''(0) = 0$ et expliquer pourquoi la courbe de h n'a pourtant pas de point d'inflexion.

Méthode : démontrer une inégalité avec la convexité

Si f est convexe sur I, alors pour tout x de I, $f(x) \geqslant$ (ordonnée de la tangente en a), c'est-à-dire $f(x) \geqslant f'(a)(x - a) + f(a)$. Si f est concave, l'inégalité est inversée.

1. Reconnaître la fonction et l'intervalle où elle est convexe ou concave.
2. Écrire l'équation de la tangente au point bien choisi.
3. Conclure par la position de la courbe par rapport à la tangente.

Exemple. La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa tangente en 0 a pour équation $y = \mathrm{e}^0(x - 0) + \mathrm{e}^0 = x + 1$. La courbe étant au-dessus de ses tangentes, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout réel x.

Exercice 4 *Démontrer une inégalité (T^{le})*

1. La fonction ln est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$. Déterminer l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1 et en déduire que $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.
2. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1, en déduire une inégalité, puis la vérifier par un calcul algébrique direct.
3. En utilisant la tangente à l'exponentielle en 1, montrer que $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}\,x$ pour tout réel x.

Exercice 5 *Étude complète : variations et convexité* (T^{le}) Soit $f(x) = (x-2)\,e^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'(x) = (x-1)\,e^x$ et dresser le tableau de variations de f (limites : $f(x) \to 0$ en $-\infty$ et $f(x) \to +\infty$ en $+\infty$, admises).
2. Montrer que $f''(x) = x\,e^x$ et étudier la convexité de f.
3. Donner les coordonnées du point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 6 *Problème en contexte : coût de production* (T^{le}) Le coût total de production de x centaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par $C(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 10x + 20$ pour $x \in [0\ ;\ 12]$. Le coût marginal est la dérivée C′ : il représente le coût de production d'une centaine d'objets supplémentaire.

1. Calculer $C'(x)$ et $C''(x)$.
2. Étudier la convexité de C sur $[0\ ;\ 12]$ et donner l'abscisse du point d'inflexion.
3. Étudier les variations du coût marginal C′. Pour quelle production est-il minimal ? Que vaut-il alors ?
4. Interpréter économiquement les deux phases séparées par le point d'inflexion.

⚠ Erreurs classiques à éviter

Erreur	Exemple faux	Correction
Confondre croissante et convexe	« ln est croissante donc convexe »	ln est croissante et concave : la convexité se lit sur f'', pas sur f'
Conclure à l'inflexion dès que $f''(a) = 0$	« $f''(0) = 0$ pour x^4, donc inflexion »	il faut un changement de signe ; $12x^2$ n'en change pas
Confondre extremum et inflexion	« f'' s'annule en 0 donc minimum en 0 »	le minimum se lit sur f', l'inflexion sur f''
Croire que concave signifie décroissante	« f concave donc f décroît »	$\sqrt{x}$ est concave et croissante
Inverser le sens de l'inégalité	« $\ln x \geqslant x - 1$ »	fonction concave : courbe **sous** la tangente, $\ln x \leqslant x - 1$

Exercice 7 *QCM (T^{le})* Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. Une fonction f deux fois dérivable est convexe sur I si et seulement si :

   A. f est croissante sur I **B.** $f''(x) \geqslant 0$ sur I **C.** $f'(x) \geqslant 0$ sur I **D.** $f(x) \geqslant 0$ sur I

2. La fonction exponentielle est :

   A. concave sur $\mathbb{R}$ **B.** convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$ seulement
   C. ni convexe ni concave **D.** convexe sur $\mathbb{R}$

3. Un point d'inflexion est un point où :

   A. f' s'annule **B.** la courbe coupe l'axe des abscisses
   C. f'' s'annule en changeant de signe **D.** f atteint un extremum

4. Si f est convexe sur I, sa courbe est, sur I :

   A. au-dessus de chacune de ses tangentes **B.** en dessous de chacune de ses tangentes
   C. confondue avec ses tangentes **D.** au-dessus de l'axe des abscisses

Exercice 8 *Vrai ou faux ?* Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une fonction croissante sur un intervalle y est convexe.

B. Si $f''(x) > 0$ sur I, alors f' est croissante sur I.

C. La fonction $x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

D. La fonction ln est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.

E. Si $f''(a) = 0$, alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.

F. Pour tout réel x, $e^x \geqslant 1 + x$.

G. Une fonction concave sur un intervalle y est décroissante.

H. Une fonction affine est à la fois convexe et concave.

*Tu bloques sur un exercice ? Consulte la fiche **Que faire quand je bloque ?***
*Tu veux retenir durablement ces méthodes ? Consulte la fiche **Mémorisation et sciences cognitives**.*
*Tu fais souvent les mêmes erreurs ? Remplis ton **Carnet d'erreurs**.*

Solutions des exercices

Corrigé de l'exercice 1.

1. x^2 et e^x : convexes (parabole et courbe exponentielle creusées vers le haut). $\sqrt{x}$ et $\ln x$: concaves (courbes bombées, qui montent de moins en moins vite). $-x^2$: concave (parabole tournée vers le bas). $\dfrac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: convexe (la courbe descend de moins en moins vite, elle est au-dessus de ses tangentes).
2. f est convexe sur $[0\ ;\ 5]$, donc f' est croissante sur $[0\ ;\ 5]$: la pente des tangentes augmente quand on se déplace vers la droite.
3. Oui : ln et $\sqrt{x}$ sont croissantes et concaves. Croissante signifie que la fonction monte ; concave signifie qu'elle monte de moins en moins vite. Les deux notions sont indépendantes.

Corrigé de l'exercice 2.

1. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$. Donc $f'' \leqslant 0$ sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et $f'' \geqslant 0$ sur $[2\ ;\ +\infty[$: f est concave sur $]-\infty\ ;\ 2]$ et convexe sur $[2\ ;\ +\infty[$.
2.
   a) $g' = g'' = e^x > 0$: g est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b) $h'(x) = 4x^3$ et $h''(x) = 12x^2 \geqslant 0$: h est convexe sur $\mathbb{R}$.
   c) $k'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $k''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$: k est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   d) $m'(x) = -2x + 4$ et $m''(x) = -2 < 0$: m est concave sur $\mathbb{R}$ (parabole tournée vers le bas).

Corrigé de l'exercice 3.

1. $f''(x) = 6(x-1)$ s'annule en 1 en changeant de signe : point d'inflexion d'abscisse 1, d'ordonnée $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, soit le point $(1\ ;\ 0)$. Tangente : $f'(1) = 3 - 6 = -3$, donc $y = -3(x-1) + 0 = -3x + 3$. La courbe traverse cette tangente en $(1\ ;\ 0)$.
2. $g'(x) = 4x^3 - 12x$ et $g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$. Il s'annule en -1 et 1 en changeant de signe (positif à l'extérieur, négatif entre) : deux points d'inflexion, $(-1\ ;\ g(-1)) = (-1\ ;\ -5)$ et $(1\ ;\ -5)$. g est convexe sur $]-\infty\ ;\ -1]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$, concave sur $[-1\ ;\ 1]$.
3. $h''(x) = 12x^2$, donc $h''(0) = 0$. Mais $12x^2 \geqslant 0$ pour tout x : h'' ne change pas de signe en 0, h est convexe sur tout $\mathbb{R}$ et la courbe reste au-dessus de sa tangente en 0 (l'axe des abscisses). Il n'y a pas d'inflexion : l'annulation de f'' est nécessaire, pas suffisante.

Corrigé de l'exercice 4.

1. $\ln 1 = 0$ et $(\ln)'(1) = 1$: la tangente en 1 a pour équation $y = 1 \times (x-1) + 0 = x - 1$. La fonction ln étant concave, sa courbe est en dessous de cette tangente : $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$, avec égalité seulement en $x = 1$.

2. $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$: tangente $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$. Par convexité, $x^2 \geqslant 2x-1$ pour tout réel x. Vérification : $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geqslant 0$. ✓

3. $\exp(1) = \mathrm{e}$ et $\exp'(1) = \mathrm{e}$: tangente $y = \mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e} = \mathrm{e}\,x$. Par convexité de l'exponentielle, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}\,x$ pour tout réel x, avec égalité en $x = 1$.

Corrigé de l'exercice 5.

1. Produit avec $u = x-2$, $v = \mathrm{e}^x$: $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-2)\,\mathrm{e}^x = (x-1)\,\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, f' a le signe de $x-1$: f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1]$ et croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, avec un minimum $f(1) = -\mathrm{e} \approx -2{,}72$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\mathrm{e}$	↗	$+\infty$

2. $f''(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\,\mathrm{e}^x = x\,\mathrm{e}^x$, du signe de x : f est concave sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. f'' s'annule en 0 en changeant de signe : point d'inflexion $(0\ ;\ f(0)) = (0\ ;\ -2)$. Tangente : $f'(0) = -1$, donc $y = -x-2$. Remarque : le minimum est en 1, l'inflexion en 0 : ce sont deux notions distinctes.

Corrigé de l'exercice 6.

1. $C'(x) = 0{,}3x^2 - 3x + 10$ et $C''(x) = 0{,}6x - 3$.

2. $C''(x) = 0 \iff x = 5$; $C'' < 0$ sur $[0\ ;\ 5[$ et $C'' > 0$ sur $]5\ ;\ 12]$. C est concave sur $[0\ ;\ 5]$ et convexe sur $[5\ ;\ 12]$; le point d'inflexion a pour abscisse 5.

3. Le signe de C'' donne les variations de C' : le coût marginal décroît sur $[0\ ;\ 5]$ et croît sur $[5\ ;\ 12]$. Il est minimal pour $x = 5$ (cinq cents objets) et vaut $C'(5) = 7{,}5 - 15 + 10 = 2{,}5$, soit 2500 € par centaine d'objets supplémentaire.

4. Jusqu'à cinq cents objets, chaque centaine supplémentaire coûte moins cher que la précédente (phase concave : rendements croissants, l'outil de production est mieux utilisé). Au-delà, chaque centaine supplémentaire coûte plus cher que la précédente (phase convexe : rendements décroissants, saturation, heures supplémentaires). Le point d'inflexion marque le passage d'une phase à l'autre.

Corrigé de l'exercice 7.

1. **Réponse B.** C'est le théorème de caractérisation par la dérivée seconde.

   - A et C : la croissance de f (signe de f') ne renseigne pas sur la convexité ; ln est croissante et concave.
   - D : le signe de f n'a aucun rapport ; $x^2 - 5$ est convexe et négative sur $[-2\ ;\ 2]$.

2. **Réponse D.** $\exp'' = \exp > 0$ sur tout $\mathbb{R}$.
   - A : la courbe se creuse vers le haut, elle n'est pas bombée.
   - B : la convexité vaut sur $\mathbb{R}$ entier, pas seulement pour $x > 0$.
   - C : elle est convexe partout.
3. **Réponse C.** La courbe traverse sa tangente là où la concavité change, donc là où f'' change de signe.
   - A et D : ce sont les extremums, liés à f'.
   - B : l'intersection avec l'axe n'a aucun lien avec la convexité.
4. **Réponse A.** C'est la définition géométrique de la convexité.
   - B : c'est la concavité.
   - C : seule une fonction affine est confondue avec sa tangente.
   - D : la position par rapport à l'axe dépend du signe de f, pas de sa convexité.

Corrigé de l'exercice 8.

A. Faux. $\sqrt{x}$ est croissante et concave sur $]0\ ;\ +\infty[$. Croissance et convexité sont indépendantes.

B. Vrai. f'' est la dérivée de f' : si elle est strictement positive, f' est strictement croissante.

C. Faux. $(x^3)'' = 6x$ change de signe en 0 : x^3 est concave sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$, avec un point d'inflexion à l'origine.

D. Vrai. $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

E. Faux. Il faut que f'' change de signe. Contre-exemple : x^4 en 0.

F. Vrai. L'exponentielle est convexe et sa tangente en 0 est la droite $y = x + 1$: la courbe est au-dessus.

G. Faux. ln est concave et croissante. Concave signifie que la pente diminue, pas qu'elle est négative.

H. Vrai. Pour $f(x) = mx + p$, $f'' = 0$, à la fois $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$: la courbe est confondue avec sa tangente, donc à la fois au-dessus et en dessous.