Convexité — Fiche d'exercices

Cette fiche accompagne le mémo sur la convexité. Tu peux t'y référer à tout moment pour retrouver la définition géométrique (position par rapport aux tangentes), le théorème de la dérivée seconde et la caractérisation des points d'inflexion. Garde toujours à l'esprit que f' donne les variations et f'' la convexité : ce sont deux questions différentes.

Exercice 1 ***Lire la convexité*** **(T^{le}).**

1. Pour chaque fonction de référence, dire si elle est convexe ou concave sur l'intervalle indiqué :

   a) $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$: ..... b) $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$: .....

   c) $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: ..... d) $x \mapsto \ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: .....

   e) $x \mapsto -x^2$ sur $\mathbb{R}$: ..... f) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$: .....

2. La courbe d'une fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes sur $[0\ ;\ 5]$. Que peut-on dire de f sur cet intervalle ? Et de f' ?

   .....

   .....

3. Une fonction peut-elle être croissante et concave sur un même intervalle ? Donner un exemple ou expliquer pourquoi c'est impossible.

   .....

   .....

Exercice 2 ***Calculer une dérivée seconde, étape par étape*** **(T^{le}).**

1. Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Compléter : $f'(x) =$ ..... et $f''(x) =$ ..... $= 6(x -$ .....).
   Donc $f'' \leqslant 0$ sur ..... et $f'' \geqslant 0$ sur ..... : f est concave sur ..... et convexe sur .....

2. Calculer la dérivée seconde et étudier la convexité de chaque fonction.

   a) $g(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ b) $h(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$

   c) $k(x) = \ln x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ d) $m(x) = -x^2 + 4x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 *Déterminer les points d'inflexion* (T^{le}).

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de sa courbe, puis l'équation de la tangente en ce point.

2. Soit $g(x) = x^4 - 6x^2$. Calculer $g''(x)$, le factoriser, et déterminer les points d'inflexion.

3. Soit $h(x) = x^4$. Montrer que $h''(0) = 0$ et expliquer pourquoi la courbe de h n'a pourtant pas de point d'inflexion.

Exercice 4 *Démontrer une inégalité* (T^{le}).

1. La fonction ln est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$. Compléter : $\ln 1 =$ ..... et $(\ln)'(1) =$ ..... , donc la tangente en 1 a pour équation $y =$ ..... .
   La courbe étant ..... de sa tangente, on en déduit que pour tout $x > 0$: $\ln x$ ..... $x - 1$.

2. La fonction $f(x) = x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1, en déduire une inégalité, puis la vérifier par un calcul algébrique direct.

3. En utilisant la tangente à l'exponentielle en 1, montrer que $e^x \geqslant e\,x$ pour tout réel x.

Exercice 5 ***Étude complète : variations et convexité*** (T^{le})**.** Soit $f(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f'(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$ et dresser le tableau de variations de f (limites : $f(x) \to 0$ en $-\infty$ et $f(x) \to +\infty$ en $+\infty$, admises).

2. Montrer que $f''(x) = x\,\mathrm{e}^x$ et étudier la convexité de f.

3. Donner les coordonnées du point d'inflexion et l'équation de la tangente en ce point.

Exercice 6 ***Problème en contexte : coût de production*** (T^{le})**.** Le coût total de production de x centaines d'objets, en milliers d'euros, est modélisé par $C(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 10x + 20$ pour $x \in [0\ ;\ 12]$. Le coût marginal est la dérivée C′ : il représente le coût de production d'une centaine d'objets supplémentaire.

1. Calculer $C'(x)$ et $C''(x)$.

2. Étudier la convexité de C sur $[0\ ;\ 12]$ et donner l'abscisse du point d'inflexion.

3. Étudier les variations du coût marginal C′. Pour quelle production est-il minimal ? Que vaut-il alors ?

4. Interpréter économiquement les deux phases séparées par le point d'inflexion.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Exercice 7 *QCM* (T^{le})**.** Pour chaque question, entourer la seule réponse correcte, puis justifier en une phrase.

1. Une fonction f deux fois dérivable est convexe sur I si et seulement si :

   A. f est croissante sur I **B.** $f''(x) \geqslant 0$ sur I **C.** $f'(x) \geqslant 0$ sur I **D.** $f(x) \geqslant 0$ sur I

. . . . . .

2. La fonction exponentielle est :

   A. concave sur $\mathbb{R}$ **B.** convexe sur $]0\ ;\ +\infty[$ seulement

   C. ni convexe ni concave **D.** convexe sur $\mathbb{R}$

. . . . . .

3. Un point d'inflexion est un point où :

   A. f' s'annule **B.** la courbe coupe l'axe des abscisses

   C. f'' s'annule en changeant de signe **D.** f atteint un extremum

. . . . . .

4. Si f est convexe sur I, sa courbe est, sur I :

   A. au-dessus de chacune de ses tangentes
   B. en dessous de chacune de ses tangentes
   C. confondue avec ses tangentes
   D. au-dessus de l'axe des abscisses

. . . . . .

Exercice 8 ***Vrai ou faux ?.*** Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier :

A. Une fonction croissante sur un intervalle y est convexe.

B. Si $f''(x) > 0$ sur I, alors f' est croissante sur I.

C. La fonction $x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

D. La fonction ln est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.

E. Si $f''(a) = 0$, alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.

F. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

G. Une fonction concave sur un intervalle y est décroissante.

H. Une fonction affine est à la fois convexe et concave.